Questions de coloriage

Roger Mansuy

FAsF18

2018

Introduction

Colorier le plan de sorte à ce que deux points quelconques à distance 1 ne soient jamais de la même couleur.

Le nombre minimal de couleurs pour pouvoir réussir ce coloriage est appelé nombre chromatique du plan et noté χ.

Objectif : calculer χ.

Ce problème est indépendamment formulé par

- Hugo Hadwiger, mathématicien suisse vers 1945
- Edward Nelson, étudiant américain vers 1950

Ce problème est indépendamment formulé par

- Hugo Hadwiger, mathématicien suisse vers 1945
- Edward Nelson, étudiant américain vers 1950

... et l'on ne connaît toujours pas la réponse.

Ce problème est indépendamment formulé par

- Hugo Hadwiger, mathématicien suisse vers 1945
- Edward Nelson, étudiant américain vers 1950

On dispose toutefois d'une réponse partielle :

Proposition

La valeur de χ est 5, 6 ou 7.

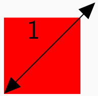
Rien n'assure a priori l'existence de χ.

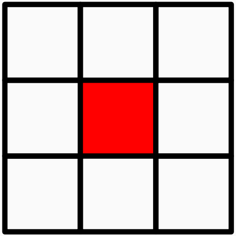
Si χ existe, on a clairement $\chi \geq 2$ puisqu'une seule couleur ne suffit pas.

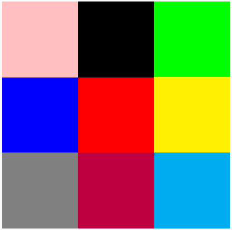
Jackson Pollock, Wild beast, 1943

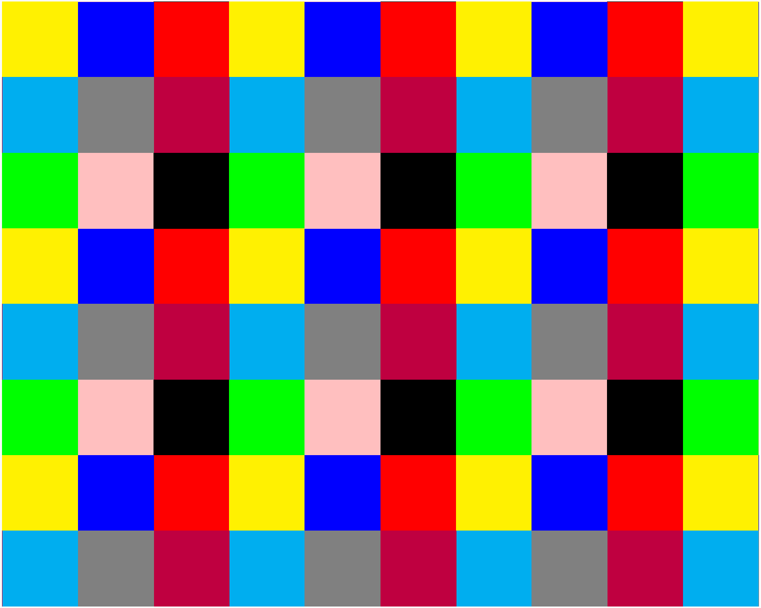
$\chi \leq 9$

Pour montrer $\chi \leq N$, il suffit d'exhiber un coloriage « admissible » du plan avec N couleurs.


1







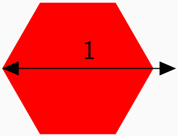
$\chi \leq 7$

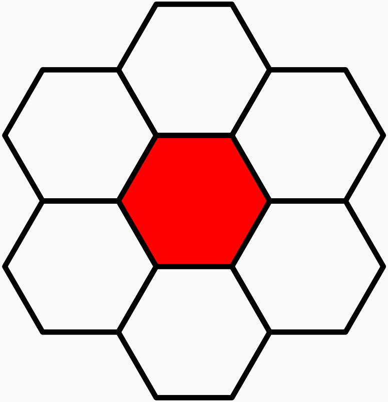
Essayons de remplacer les carrés par d'autres figures géométriques...

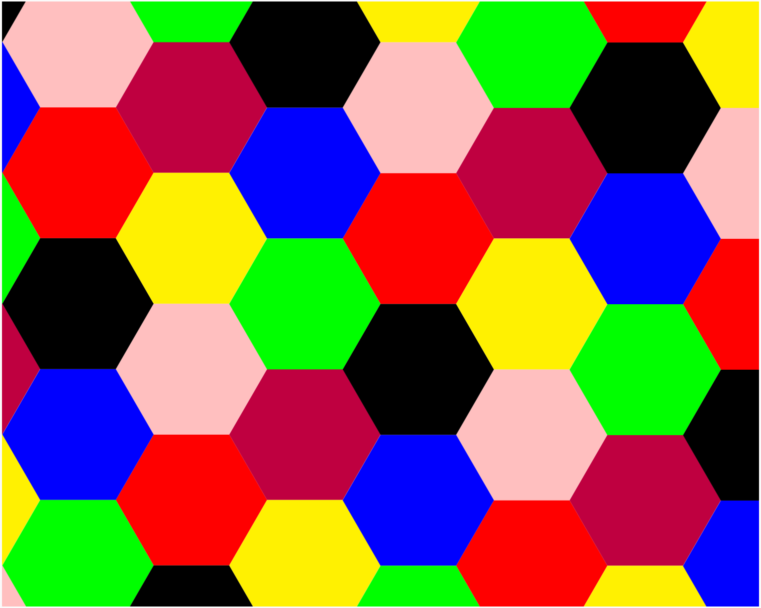
$\chi \leq 7$

Essayons de remplacer les carrés par d'autres figures géométriques...

... des hexagones réguliers.


1

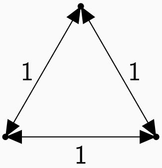




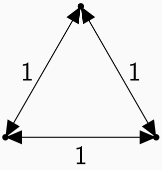
$\chi \geq 3$

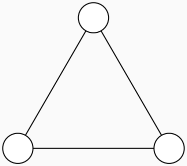
Pour montrer $\chi \geq N$, il suffit de trouver un ensemble de points du plan dont le coloriage requiert N couleurs.

Considérons trois points du plan qui forment un triangle équilatéral de côté 1.

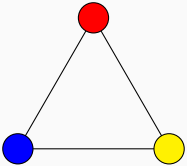


Considérons trois points du plan qui forment un triangle équilatéral de côté 1.

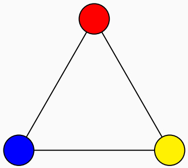




Considérons trois points du plan qui forment un triangle équilatéral de côté 1.



Considérons trois points du plan qui forment un triangle équilatéral de côté 1.



Ce triangle fournit un graphe :

- qui est distance-unité,
- qui requiert trois couleurs.

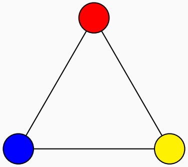
Proposition

Il faut trois couleurs pour colorier le triangle donc au moins trois pour colorier le plan :

$$\chi \geq 3.$$

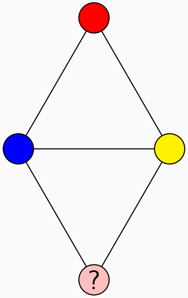
$\chi \geq 4$

Cherchons à ajouter un quatrième point.



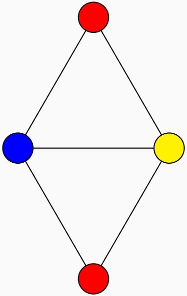
$\chi \geq 4$

Cherchons à ajouter un quatrième point.

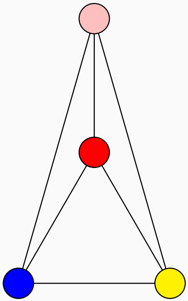


$\chi \geq 4$

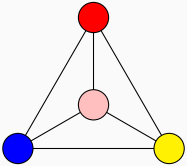
Cherchons à ajouter un quatrième point.



On aimerait plutôt l'ajouter ainsi



voire ainsi



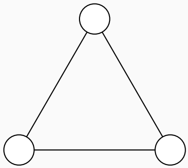
Proposition

Il n'est pas possible de placer quatre points dans le plan de sorte à ce que les distances entre deux quelconques de ces points soient égales à 1.

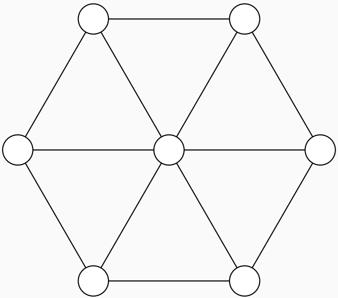
Proposition

Le graphe complet K_4 n'est pas distance-unité.

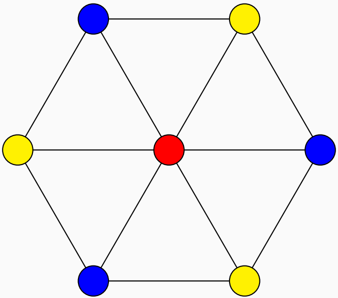
Faisons un autre essai en repartant du triangle et en ajoutant davantage de points (le graphe W_7).



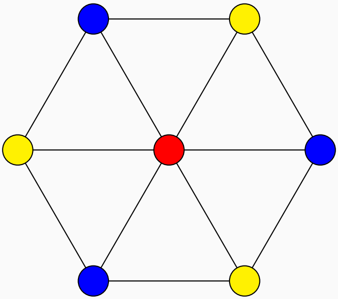
Faisons un autre essai en repartant du triangle et en ajoutant davantage de points (le graphe W_7).



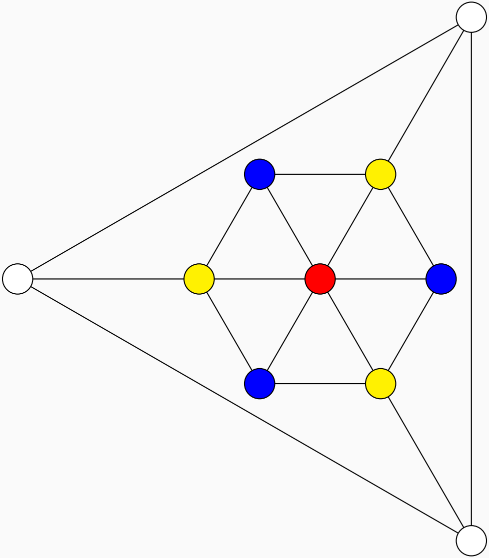
Faisons un autre essai en repartant du triangle et en ajoutant davantage de points (le graphe W_7).

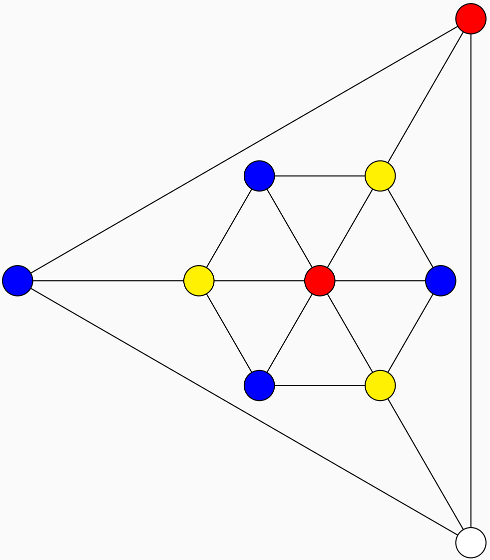


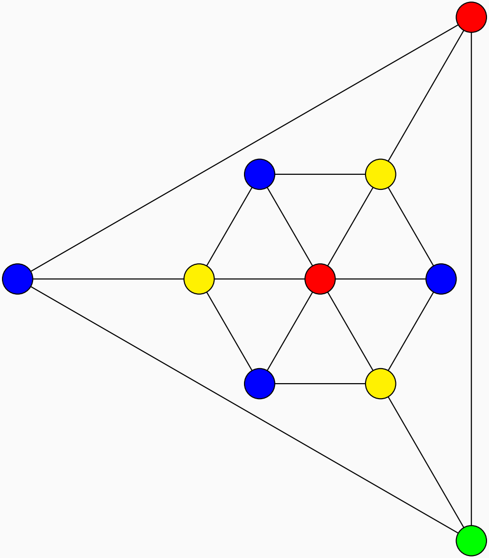
Faisons un autre essai en repartant du triangle et en ajoutant davantage de points (le graphe W_7).



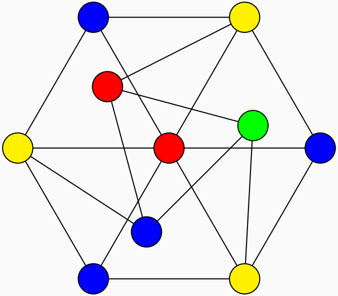
Compliquons encore !







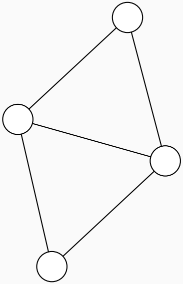
Avec une autre représentation, on obtient que le graphe de Golomb est distance-unité.

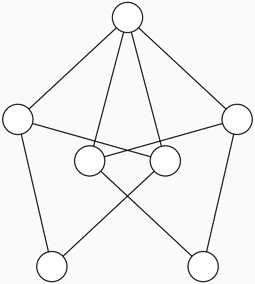


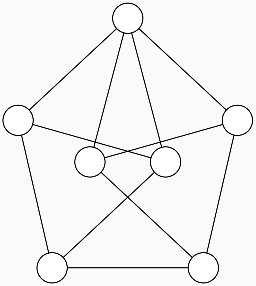
Proposition

Il faut quatre couleurs pour colorier le graphe de Golomb donc au moins quatre pour colorier le plan :

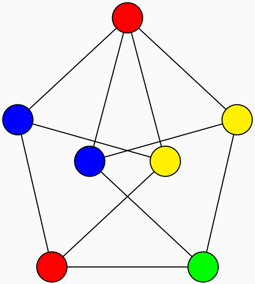
$$\chi \geq 4.$$







Tout coloriage du graphe de Moser ainsi obtenu (appelé broche de Moser) requiert également quatre couleurs !



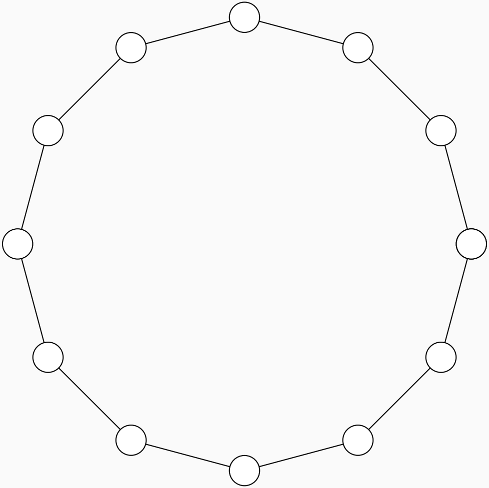
Exercices

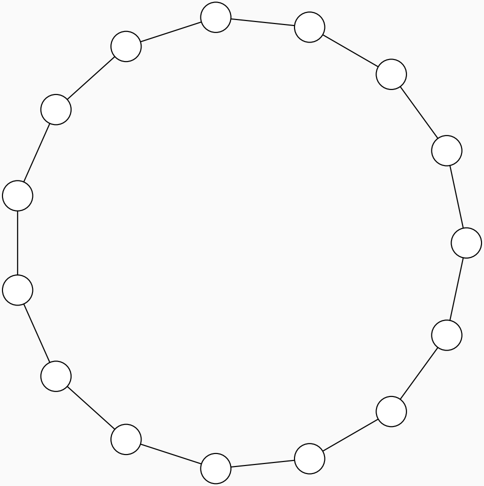
Cette méthode s'avère très compliquée puisqu'il faut

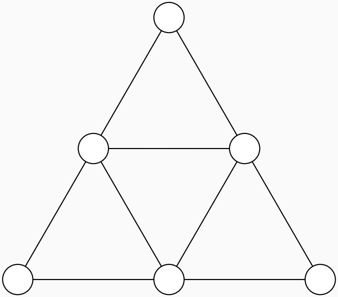
- vérifier que le graphe est distance unité
- calculer le nombre chromatique du graphe

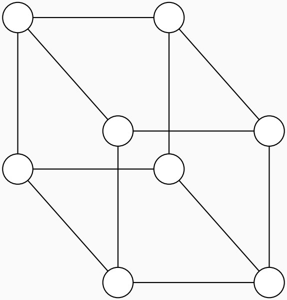
Exercice

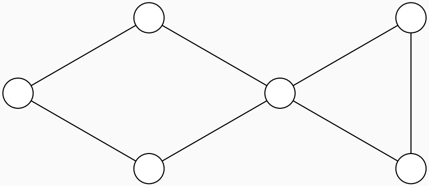
Déterminer le nombre de couleurs nécessaires pour colorier les graphes suivants.

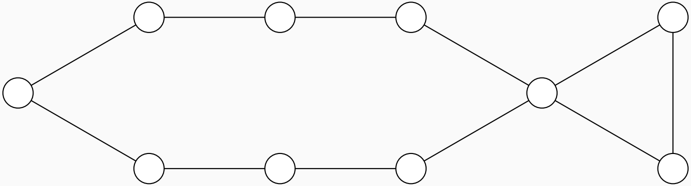


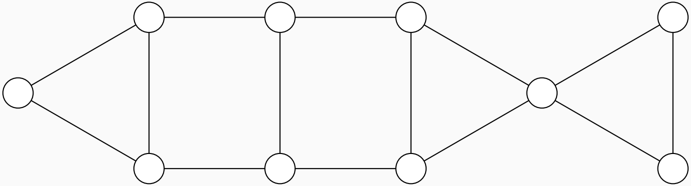


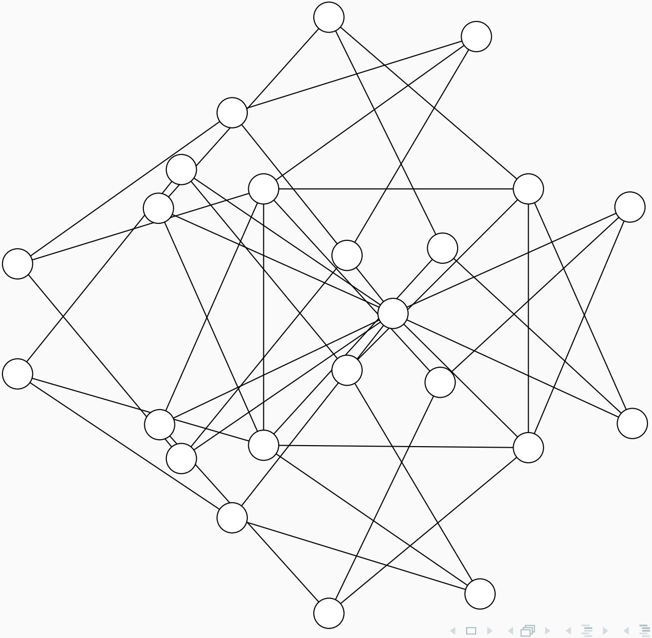












	2		5		1		9	
8			2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

	2		5		1		9	
8			2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	9
		2				7		
	9			3			8	
2			8		4			7
	1		9		7		6	

Les sommets du graphe sont les cases et les arêtes relient deux cases alignées horizontalement, alignés verticalement ou dans le même carré.

Proposition

Soit G un graphe simple connexe de degré maximal Δ.
Alors, $\chi \leq \Delta + 1$.

Proposition

Soit G un graphe simple connexe de degré maximal Δ différent des graphes complets et des cycles de longueur impaire.
Alors, $\chi \leq \Delta$.

Proposition

Soit G un graphe admettant comme sous-graphe un graphe complet à n sommets.
Alors, $\chi \geq n$.

$\chi \geq 5$

Est-il possible d'utiliser cette méthode pour passer du minorant 4 au minorant 5 ?

Aubrey de Grey, « en croisade contre le vieillissement »

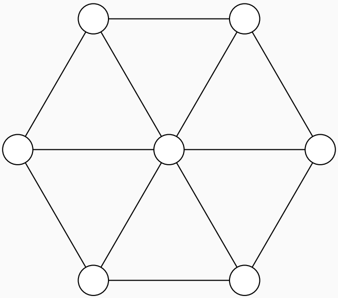
- est un biogérontologue autodidacte, fondateur du projet *Strategies for Engineered Negligible Senescence*
- cherche « à régénérer les tissus cellulaires pour étendre l'espérance de vie au-delà de 1000 ans »

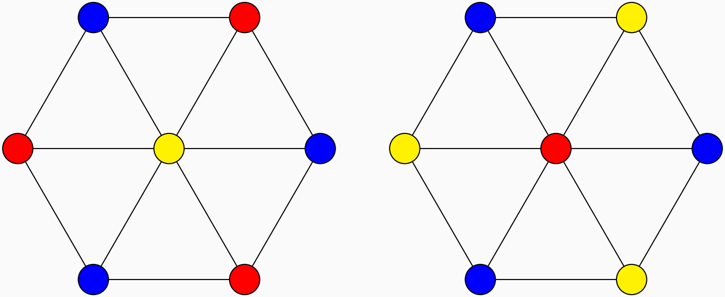
Il publie (sur ArXiV) en avril 2018 un article intitulé :

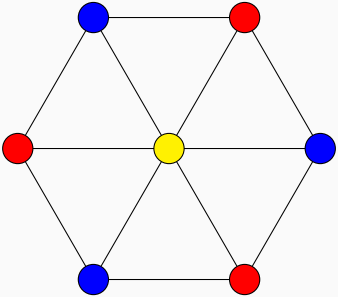
The chromatic number of the plane is at least 5

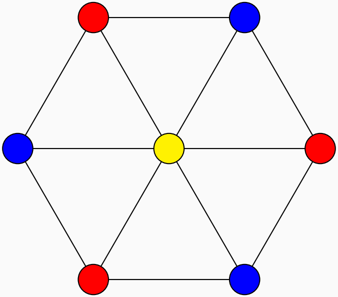
dans lequel il propose un graphe distance-unité à 1581 sommets dont le coloriage requiert cinq couleurs !

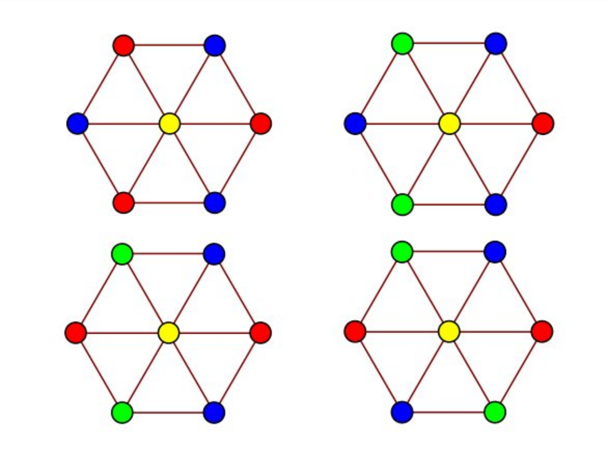
Il commence par remarquer qu'il y a essentiellement quatre coloriages avec 4 couleurs du graphe roue W_7.





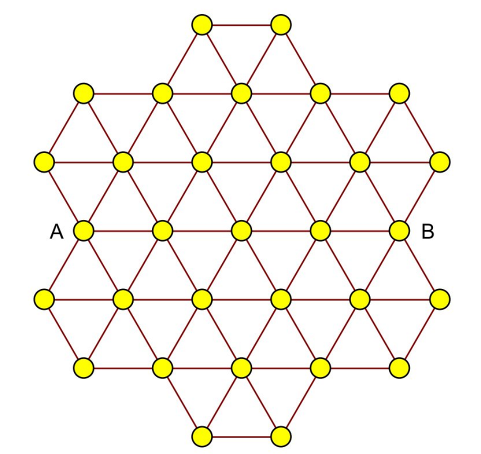




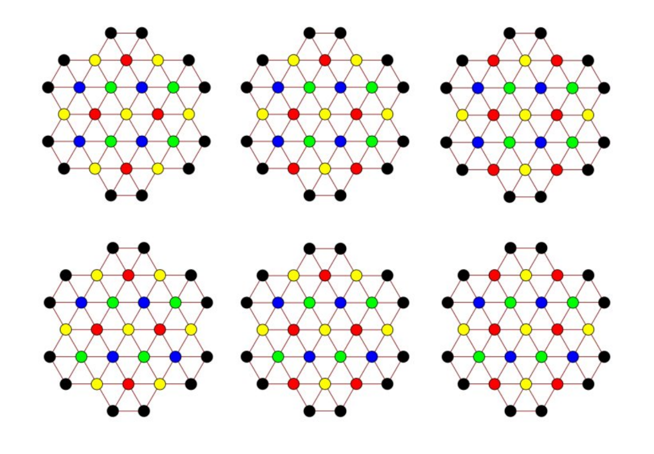


Deux d'entre eux (ceux du haut) admettent trois sommets de la même couleur.

Il couple treize roues W_7 pour former un graphe appelé J.

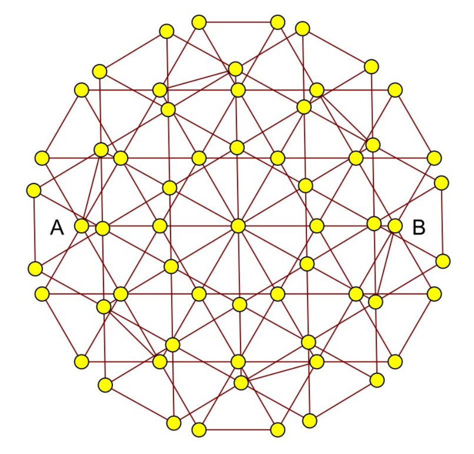


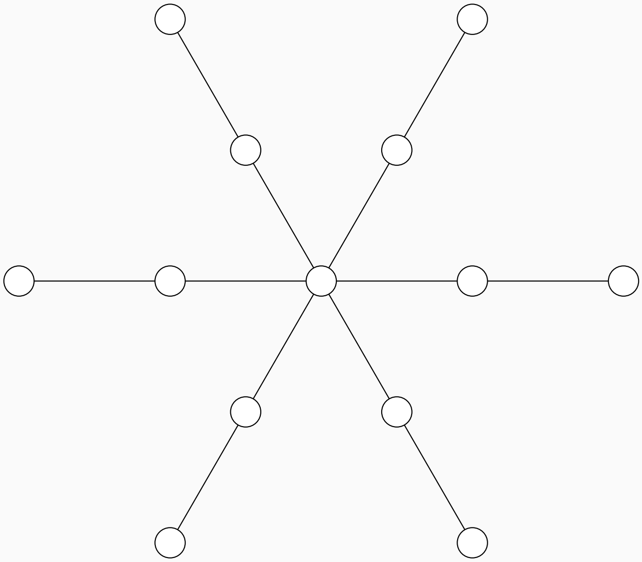
J admet essentiellement six coloriages tels que les sept copies de W_7 « intérieures » ne contiennent pas trois sommets de la même couleur.

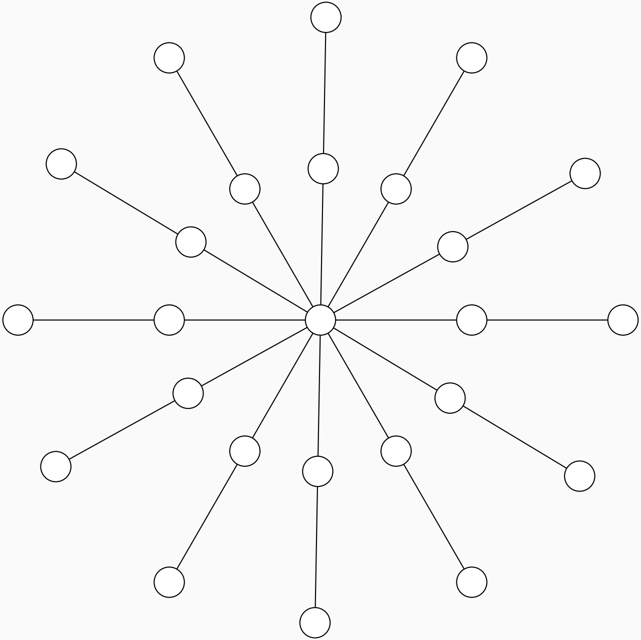


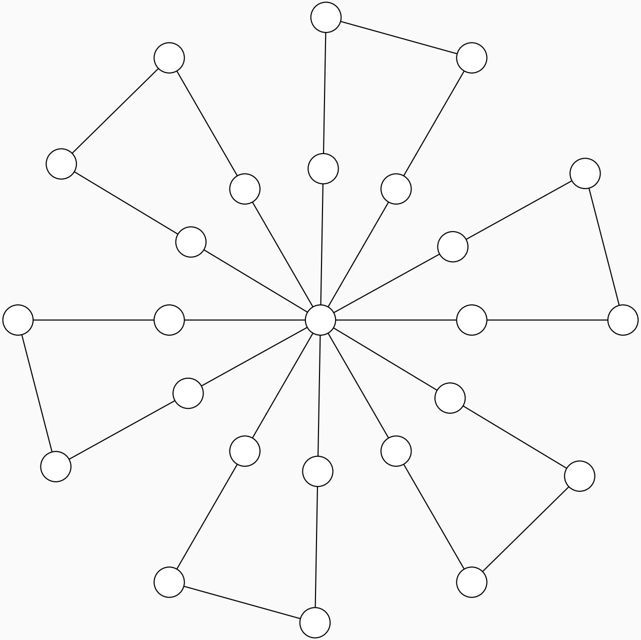
Il y a (de gauche à droite) 6, 4 (consécutifs) ou 2 (opposés) sommets à distance 2 du centre de la même couleur que le centre.

Le graphe K est composé de deux copies de J tournées l'une par rapport à l'autre d'un angle de $2 \arcsin \frac{1}{4}$ autour du centre.





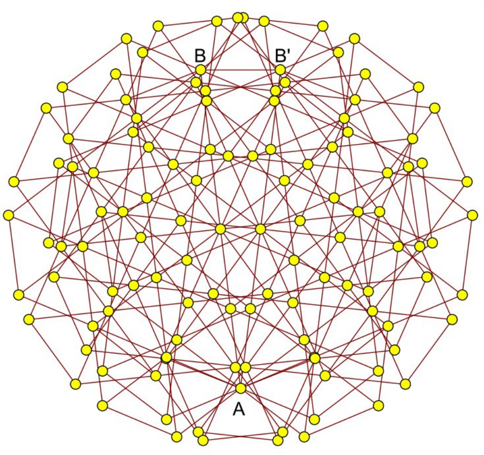




L'objectif est donc de « coller » des copies de graphes en reliant des points de sorte à les empêcher d'avoir la même couleur (comme pour la construction du graphe de Moser).

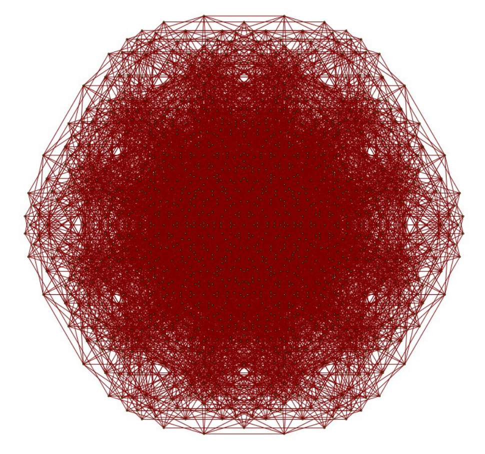
Par exemple, on force ici les copies du graphe J à avoir exactement 2 sommets à distance 2 du centre de la même couleur que le centre puisque, dans le cas contraire, une nouvelle arête relierait deux points de la même couleur.

Le graphe L est composé de deux copies de K tournées autour de A et d'angle $2 \arcsin \frac{1}{8}$.



Le point B et son image B' sont désormais à distance 1 : ils sont de couleurs différentes.

Le graphe M est trouvé avec 1345 sommets et contient un très grand nombre de graphes de Moser.



C'est l'union de sept copies translatées d'un graphe W dont on connaît explicitement les coordonnées des 301 sommets.

Dans L, il y a 52 « copies » de W_7.

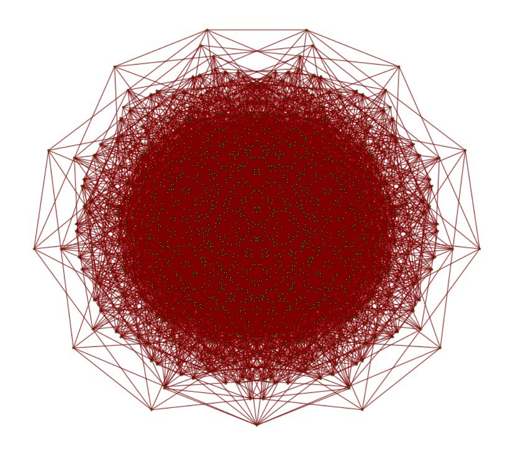
Il y a un graphe W_7 au milieu de M.

On copie 52 fois M de sorte à ce que chaque translaté de M soit centré sur l'une des occurrences de W_7 dans L.

Proposition

Le graphe N ainsi obtenu n'est pas coloriable avec 4 couleurs.

Le graphe N admet 20425 sommets. A. de Grey le simplifie en enlevant les sommets qui ne contraignent pas la coloriabilité pour tomber sur un graphe G à seulement 1581 sommets.



Le projet Polymath est une plate-forme pour des collaborations massives de mathématiciens.

- lancée par le mathématicien britannique Timothy Gowers en 2009 (médaille Fields 1998)
- où l'on croise souvent Terence Tao (médaille Fields 2006)

Il y a actuellement 16 projets Polymath.
Trois ont donné lieu à des publications d'articles de recherche sous le pseudonyme ≪ D.H.J. Polymath ≫.

Voici le seizième projet sur proposition de A. de Grey le 10 avril :

finding simpler unit distance graphs of chromatic number 5

- First thread : Simplifying de Grey's graph, Apr 14
- Second thread : What does it take to be 5-chromatic ?, Apr 22
- Third thread : Is 6-chromatic within reach ?, May 1
- Fourth thread : Applying the probabilistic method, May 5
- Fifth thread : Human-verifiable proofs, May 10
- Sixth thread : Wrestling with infinite graphs, May 29
- Seventh thread : Upper bounds, June 16
- Eighth thread : More upper bounds, June 24
- Ninth thread : Searching for a 6-coloring, July 2

Parmi les contributeurs à ce projet Polymath, Marijn Heule a fait de nombreuses avancées et propose désormais un graphe distance-unité à 553 sommets qui requiert 5 couleurs !

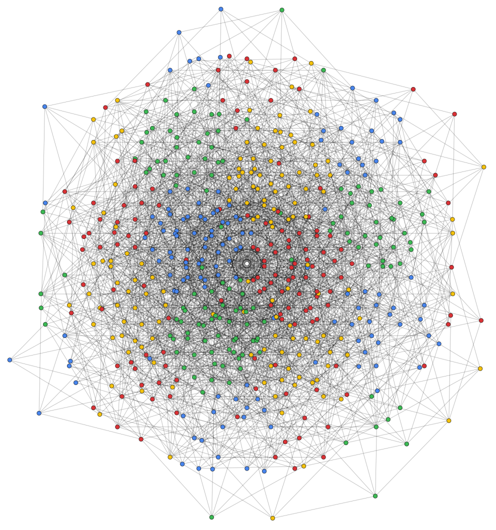
$\lvert S\rvert$	$\lvert A\rvert$	
874	4461	14/04/2018
826	4273	16/04/2018
803	4144	30/04/2018
633	3166	06/05/2018
610	3000	14/05/2018
553	2722	30/05/2018

Il procède en plusieurs étapes

- Il convertit la non-coloriabilité avec 4 couleurs du graphe (S, A) en une formule de la logique propositionnelle

$$\bigwedge_{s \in S} (x_{s,1} \vee \ldots \vee x_{s,4}) \wedge \bigwedge_{\{s,s'\} \in A} \bigwedge_{c=1}^{4} (\overline{x_{s,c}} \vee \overline{x_{s',c}}).$$

- Il utilise un *SAT Solver* pour trouver une réfutation, c'est-à-dire une preuve de la formule.
- Il utilise un *proof checker* pour minimiser cette preuve.
- Il traduit la preuve obtenue en graphe.



Conclusion

On n'a pas réglé le problème de la détermination de χ pour le plan mais il existe d'autres réponses à des questions proches.

Proposition

Pour une bande du plan de largeur 2, $\chi \leq 6$.

Proposition

Si on impose que les zones colorées sont convexes ou délimitées par des courbes (de Jordan), alors, il faut au moins 6 couleurs.

Proposition

Pour l'espace $\mathbb{R}^3$, $6 \leq \chi \leq 15$.

Merci